भारतीय वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान पत्रिका
वर्ष 33 अंक (2) दिसम्बर 2025 पृ. 97-101
DOI: 10.56042/bvaap.v33i2.19339

सन्निकटन एल्गोरिद्म द्वारा इष्टतमीकरण

अशोक सिंह चौहान*, आदर्श मंगल** एवं ज्ञान शेखर***
*शोधार्थी (गणित), भगवंत विश्वविद्यालय, अजमेर, राजस्थान 305 004 (भारत)
**गणित विभाग, अभियांत्रिकी महाविद्यालय, अजमेर, राजस्थान 305 025 (भारत)
***रिसर्च सुपरवाइज़र, भगवंत विश्वविद्यालय अजमेर, राजस्थान 305 004 (भारत)
वर्तमान में गणित विभाग, राम सकल सिंह साइंस कॉलेज, सीतामढ़ी, बिहार 843 301 (भारत)
[ई-मेलः gyanshekhar677@gmail.com]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में घनीय प्रोग्रामन समस्या का सन्निकटन एल्गोरिद्म से हल प्रस्तावित किया गया है। खोबरागड़े एवं अन्य ने रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए इस एल्गोरिद्म का प्रस्ताव दिया था। इस शोध पत्र में सन्निकटन एल्गोरिद्म के उपयोग से रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली घनीय प्रोग्रामन समस्या का हल ज्ञात किया गया है। इस एल्गोरिद्म से एकधा विधि की तुलना में कम पुनरावृत्तियों में ही इष्टतम हल प्राप्त किया जा सकता है। अतः प्रस्तावित एल्गोरिद्म को एक चक्रीय समस्या को हल कर बेहतर तरीके से समझा जा सकता है।

मुख्य शब्दः एल्गोरिद्म, घनीय, उद्देश्य, प्रोग्रामन समस्या

Optimization through Approximation Algorithm

Ashok Singh Chouhan*, Adarsh Mangal** and Gyan Shekhar***
*Research Scholar (Mathematics), Bhagwant University, Ajmer, Rajasthan 305 004 (India)
**Department of Mathematics, Engineering College, Ajmer, Rajasthan 305 025 (India)
***Research Supervisor, Bhagwant University, Ajmer, Rajasthan 305 004 (India)
Presently Department of Mathematics, Ram Sakal Singh Science College, Sitamarhi, Bihar 843 301 (India)
[E-mail: gyanshekhar677@gmail.com]

Abstract

This research paper proposes an Approximation Algorithm to solve the Cubic Objective Function Programming Problem (COFPP). The same had been introduced to solve the Linear Programming Problem (LPP) by Khobragade et al. In this paper, we used the Approximation algorithm to solve linearly factorized cubic objective function programming problem. This algorithm can achieve an optimal solution in fewer iterations as compared to Simplex method. Hence, the proposed algorithm can be better understood by solving a cyclic problem.

Key words : Algorithm, cubic, objective, programming problem

प्रस्तावना

अरैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ, अरैखिक/रैखिक उद्देश्य फलन तथा रैखिक/अरैखिक व्यवरोधों वाली गणितीय प्रोग्रामन समस्याएँ होती हैं। रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली घनीय प्रोग्रामन समस्या, अरैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के सबसे सरलतम रूपों में से एक है। इस प्रकार की समस्याओं में व्यवरोध रैखिक होते हैं तथा असमिकाएं (अथवा/और) समीकरण दोनों प्रकार के हो सकते हैं। ऐसी समस्याओं को केंद्र में रखते हुए कई शोधार्थियों ने अपने शोध कार्यों का प्रकाशन किया है। ऐसी समस्याओं को हल करने के कई दृष्टिकोण साहित्य में उपलब्ध है, जो उद्देश्य फलन एवं व्यवरोधों के प्रकार से प्रभावित होते हैं। उनमें से कुछ का उल्लेख यहाँ किया जा रहा है, जो हमारे द्वारा किये गए शोध के दायरे में समाहित होते हैं।

खोबरागड़े एवं अन्य[7] ने रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के इष्टतम हल को ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सन्निकटन एल्गोरिद्म का प्रयोग किया। बाजारा एवं अन्य[1] ने विविध प्रकार की अरैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए कई दृष्टिकोण प्रस्तुत किये। भट एवं अन्य[2] ने एकधा विधि द्वारा अरैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को संबोधित करने का एक तरीका प्रस्तुत किया। देन्त्ज़िग[3] ने रैखिक फलनों के अधिकतमीकरण की व्याख्या की। गाओ एवं अन्य[4] ने परवलयिक नियम के साथ घनीय-द्विघात अरैखिक श्रोडिन्गर और रेजोनेंट अरैखिक श्रोडिन्गर समीकरण के ऑप्टिकल सोलिटन हलों के बारे में चर्चा की। हेनिन एवं अन्य[5] ने घनीय प्रोग्रामन के लिए उत्तल एकधा विधि की विशेषज्ञता का वर्णन किया। खोबरागड़े एवं अन्य[6] ने सिम्पलेक्स विधि के लिए वैकल्पिक दृष्टिकोण प्रस्तुत किया। ओमेर एवं अन्य[8] ने संशोधित एकधा विधि द्वारा घनीय उद्देश्य फलन रखने वाली प्रोग्रामन समस्या का हल प्रस्तुत किया। ओमेर एवं अन्य[9] ने घनीय उद्देश्य फलन रखने वाली प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए एक नवीन दृष्टिकोण प्रस्तावित किया।

प्रारम्भिक संकल्पनाएँ

रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली घनीय प्रोग्रामन समस्या

एक घनीय इष्टतमीकरण समस्या पर विचार करते हैं जिसमें समस्या के उद्देश्य फलन को तीन रैखिक फलनों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :-

अधिकतम कीजिये $Z = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \alpha)$

$(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \beta)\ (d_1 x_1 + d_2 x_2 + \gamma)$

व्यवरोध $a_1 x_1$

और $x \geq 0$

जहाँ A एक $m\times n$ आव्यूह है, x निर्णायक चरों का n-विमीय स्तम्भ सदिश है; a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 एवं d_2 उद्देश्य फलन में प्रयुक्त गुणांक है, $b^T \in R^m$ तथा α, β, γ अदिश है।

सन्निकटन एल्गोरिद्म

चरण 1. सर्वप्रथम दी गई रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली घनीय प्रोग्रामन समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के रूप में व्यक्त करते हैं। विचारार्थ समस्या के उद्देश्य फलन में जितने रैखिक गुणनखंड होते हैं उतनी ही रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को अभिव्यक्त किया जाता है।

चरण 2 - उपरोक्त चरण 1 में प्राप्त सभी रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ अधिकतमीकरण के रूप की होनी चाहिए। यदि ऐसा नहीं हो तो समस्या को अधिकतमीकरण में निम्न प्रकार परिवर्तित करते हैं

निम्नतम z = अधिकतम (-z)

चरण 3 - उपरोक्त चरण 1 में प्राप्त सभी रैखिक प्रोग्र. ामन समस्याओं में विद्यमान आवश्यकतापूरक सदिशों के सभी घटक धनात्मक होने चाहिए। यदि ऐसा नहीं हो तो उस विशेष व्यवरोध से सम्बंधित असमिका को (-1) से गुणा कर धनात्मक बनाते हैं।

चरण 4 - सभी रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में व्यवरोधों के रूप में विद्यमान असमिकाओं को न्यूनतापूरक/आधिक्यपूरक चरों के द्वारा समीकरणों में परिवर्तित करते हैं। उद्देश्य फलन में ऐसे चरों का मूल्य शून्य रखते हैं।

चरण 5 - प्रत्येक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए सिम्पलैक्स सारणी बनाते हैं।

चरण 6 - सिम्पलैक्स सारणी से शुद्ध मूल्यांकन पंक्ति $(Z_j - C_j)$, जहाँ $j = 1,2,\ldots\ldots, n$ के मूल्य ज्ञात करते हैं।

चरण 7 - अब $(Z_j - C_j)$ के चिन्ह पर विचार करते हैं :

(i) यदि $(Z_j - C_j)$ के सभी मूल्य धनात्मक हो तो इस प्रकार प्राप्त हल इष्टतम है।

(ii) यदि कम से कम एक $(Z_j - C_j)$ ऋणात्मक हो तो इस प्रकार प्राप्त हल के लिए अगले चरण पर जाना होता है।

चरण 8 - यदि $(Z_j - C_j)$ के एक से अधिक मूल्य ऋणात्मक हो तो उनमें से अधिक ऋणात्मक मूल्य को चुनते हैं, माना यह मूल्य $j = r$ के लिए $(Z_r - C_r)$ है।

(i) यदि सभी y_{ir} $(i=1,2,\ldots, m)$ ऋणात्मक हो तो दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का अपरिबद्ध हल है।

(ii) यदि कम से कम एक y_{ir} धनात्मक हो तो सम्बंधित सदिश y_r आधारी सदिश के रूप में सारणी में प्रवेश करता है।

चरण 9 - अनुपातों $(\frac{x_{Bi}}{y_{ir}}, >0, i=1,2,\ldots\ldots\ldots,m)$ को ज्ञात करते हैं और इन अनुपातों में से निम्नतम अनुपात का चयन करते हैं। माना यह निम्नतम अनुपात $\frac{x_{Bk}}{y_{kr}}$ के रूप में प्राप्त हो रहा है तो सदिश अपगामी सदिश होगा। उभयनिष्ठ अवयव y_{kr} जो k वीं पंक्ति एवं r वें स्तम्भ में है, सारणी का कीलक अवयव कहलाता है।

चरण 10 - कीलक अवयव जिस पंक्ति में विद्यमान है उस पूरी पंक्ति को उस कीलक अवयव से भाग देकर कीलक अवयव के स्थान पर इकाई बनाते हैं तथा उस स्तम्भ के शेष अवयवों को, जिसमें कीलक अवयव विद्यमान है, निम्न संबंधों की सहायता से शून्य बनाते हैं :-

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ki}}{y_{kr}} y_{ir}, \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m+1,\ l \neq k$$

$$y'_{ij} = \frac{y_{kj}}{y_{kr}}\ y_{ir} \quad j = 1,2,\ldots\ldots, n$$

चरण 11 - चरण 7 का अनुसरण करते हैं तथा सम्पूर्ण गणनीय प्रक्रिया को तब तक दोहराते हैं जब तक कि या तो इष्टतम हल प्राप्त नहीं हो जाता या अपरिबद्ध हल होने का संकेत नहीं मिल जाता।

इस शोध पत्र में उस सदिश को प्रवेशी सदिश के रूप में $\dfrac{(z_j - c_j)}{c_j \sum y_{ij}}$ चयनित किया गया है जिसके लिए ($c_j>0, y_{ij} \geq 0$) अधिक ऋणात्मक हो ताकि कम पुनरावृत्तियों में ही इष्टतम हल तक पहुंचा जा सकें। यह भी स्पष्ट किया जा सकता है कि एकधा विधि की तुलना में इस एल्गोरिथ्म में पुनरावृत्तियों की संख्या या तो कम होती है या बराबर। किसी भी अवस्था में पुनरावृत्तियों की संख्या सिम्पलैक्स विधि से ज्यादा नहीं होती है। अब, एक दृष्टान्तीय उदाहरण के द्वारा सन्निकटन एल्गोरिथम को समझने का प्रयास करते हैं।

दृष्टान्तीय उदाहरण

अधिकतम कीजिये $Z = (2x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(3x_1 - 2x_2)$

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 \leq 24$

$10x_1 + 5x_2 \leq 10$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

उपरोक्त रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली घनीय प्रोग्रामन समस्या से निम्न तीन रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ प्राप्त होती है :-

(i) अधिकतम कीजिये $Z = (2x_1 + x_2) = Z_1$ (Let)

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 \leq 24$

$10x_1 + 5x_2 \leq 10$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

(ii) अधिकतम कीजिये $Z = (x_1 - x_2) = Z_2$ (Let)

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 \leq 24$

$10x_1 + 5x_2 \leq 10$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

(iii) अधिकतम कीजिये $Z = (3x_1 - 2x_2) = Z_3$ (Let)

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 \leq 24$

$10x_1 + 5x_2 \leq 10$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

समस्या (I) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है :- अधिकतम कीजिये

Z_1 (माना) $= 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2$

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 + S_1 + 0S_2 = 24$

$10x_1 + 5x_2 + 0S_1 + S_2 = 10$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$

सारणी 1

		c_j	2	1	0	0	अनुपात
C_B	X_B	b	x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	24	8	6	1	0	3
0	S_2	10	10	5	0	1	1
	$(Z_j\text{-}C_j) \rightarrow$		$-2\uparrow$	-1	0	$0\downarrow$	

यहाँ $Z_1\text{-}C_1 = -2$ तथा $Z_2\text{-}C_2 = -1$ अतः

$$\frac{z_1 - c_1}{c_1 \sum y_{i1}} = \frac{-2}{36} = \frac{-1}{18} \quad \text{एवं} \quad \frac{z_2 - c_2}{c_2 \sum y_{i2}} = \frac{-1}{11}$$

चूंकि $\frac{-1}{18}$ अधिक ऋणात्मक है, अतः अगली सारणी के लिए सदिश x_1 प्रवेशी सदिश होगा। सबसे अंतिम अनुपात के स्तम्भ से यह स्पष्ट है कि निम्नतम अनुपात S_2 के लिए प्राप्त हो रहा है अतः S_2 अपगामी सदिश होगा। 10 कीलक अवयव है।

सारणी 2

		c_j	2	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	S_1	S_2
0	S_1	16	0	2	1	$\frac{-4}{5}$
2	x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$
	$(Z_j\text{-}C_j) \rightarrow$		0	0	0	$\frac{1}{5}$

चूंकि $(Z_j\text{-}C_j)$ के सभी मान धनात्मक है अतः यह एक इष्टतम हल है।

$x_1 = 1, x_2 = 0 \quad Z_1 = 2$

समस्या (II) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है :- अधिकतम कीजिये

Z_2 (माना) $= x_1 - x_2 + 0S_1 + 0S_2$

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 + S_1 + 0S_2 = 24$

$$10x_1 + 5x_2 + 0S_1 + S_2 = 10$$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$

सारणी 3

		c_j	1	-1	0	0	अनुपात
C_B	X_B	b	x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	24	8	6	1	0	3
0	S_2	10	10	5	0	1	1
	$(Z_j\text{-}C_j) \rightarrow$		-1↑	1	0	0↓	

यहाँ $Z_1\text{-}C_1 = -1$ तथा $Z_2\text{-}C_2 = 1$ अतः $\frac{(z_1-c_1)}{c_1\sum y_{i1}} = \frac{-1}{18}$

अतः अगली सारणी के लिए सदिश x_1 प्रवेशी सदिश होगा। सबसे अंतिम अनुपात के स्तम्भ से यह स्पष्ट है कि निम्नतम अनुपात S_2 के लिए प्राप्त हो रहा है अतः S_2 अपगामी सदिश होगा।

सारणी 4

		c_j	1	-1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	S_1	S_2
0	S_1	16	0	2	1	$\frac{-8}{10}$
1	x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$
	$(Z_j\text{-}C_j) \rightarrow$		0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{10}$

चूंकि $(Z_j\text{-}C_j)$ के सभी मान धनात्मक है अतः यह एक इष्टतम हल है।

$x_1 = 1, x_2 = 0, \ Z_2 = 1$

समस्या (III) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है :- अधिकतम कीजिये

$$Z_2 \text{ (माना)} = 3x_1 - 2x_2 + 0\ S_1 + 0S_2$$

व्यवरोध $8x_1 + 6x_2 + S_1 + 0S_2 = 24$

$$10x_1 + 5x_2 + 0S_1 + S_2 = 10$$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$

सारणी 5

		c_j	3	-2	0	0	अनुपात
C_B	X_B	b	x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	24	8	6	1	0	3
0	S_2	10	10	5	0	1	1
	$(Z_j\text{-}C_j) \rightarrow$		-3↑	2	0	0↓	

यहाँ $Z_1\text{-}C_1 = -1$ तथा $Z_2\text{-}C_2 = 1$ अतः $\frac{(z_1-c_1)}{c_1\sum y_{i1}} = \frac{-1}{18}$

अतः अगली सारणी के लिए सदिश x_1 प्रवेशी सदिश होगा। सबसे अंतिम अनुपात के स्तम्भ से यह स्पष्ट है कि निम्नतम अनुपात S_2 के लिए प्राप्त हो रहा है अतः S_2 अपगामी सदिश होगा।

सारणी 6

		c_j	3	-2	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	S_1	S_2
0	S_1	16	0	2	1	$\frac{-4}{5}$
3	x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$
	$(Z_j\text{-}C_j) \rightarrow$		0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{10}$

चूंकि $(Z_j\text{-}C_j)$ के सभी मान धनात्मक है अतः यह एक इष्टतम हल है।

$x_1 = 1, x_2 = 0, \ Z_3 = 3$

अतः उपरोक्त रैखिकतः गुणनखंडित घनीय प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल निम्न है :-

$x_1 = 1, x_2 = 0, \ Z = (Z_1)(Z_2)(Z_3) = (2)(1)(3) = 6$

निष्कर्ष

खोबरागड़े एवं अन्य द्वारा प्रस्तावित सन्निकटन एल्गोरिद्म पारंपरिक सिम्प्लेक्स विधि से बेहतर है क्योंकि इसमें कम पुनरावृत्तियों में ही इष्टतम हल को प्राप्त किया जा सकता है। इस एल्गोरिद्म से प्राप्त परिणाम को गॉस विलोपन विधि, संशोधित फूरिएर विलोपन विधि, पारंपरिक सिम्पलेक्स विधि तथा अन्य विधियों से प्राप्त परिणामों को आसानी से सत्यापित किया जा सकता है।

हितों का टकराव

लेखक इस शोध पत्र के प्रकाशन के सम्बन्ध में किसी भी प्रकार के हितों के टकराव की घोषणा नहीं करते हैं।

सन्दर्भ

1. Bazaraa, M.S., Sherali, H. D. and Shetty, C.M., (2006). Nonlinear programming : Theory and algorithms. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 537-654. https://doi.org/10.1002/0471787792.
2. Bhat, K. A. and Ahmed, A., (2012). Simplex method and non-linear programming. International Journal of Computational Science and Mathematics, 4, pp: 299-303.

3. Dantzig, G.B., (1951). Maximization of linear function of variables subject to linear inequalities in 21 ed. Koopman Cowls Commission Monograph 13, John Wiley and Sons, Inc., New York.
4. Gao, W., Ismael, H. F., Husien, A. M., Bulut H. and Baskonus, ZH. M., (2020). Optical soliton solutions of the cubic-quartic nonlinear Schrodinger and resonant non-linear Schrodinger equation with the parabolic law. Applied Sciences, 10, 219. https://doi.org/10.3390/app10010219.
5. Henin]C- and Doutriaux, J., (1980). A specialization of the convex simplex method to cubic programming. Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali, 3, (1980) 61-72. https://doi.org/10.1007/BF02089026.
6. Khobragade, N. W. and Khot, P. G., (2004). Alternative approach to the simplex method-I. Bull. Of Pure and Appl. Sc., Vol. 23E, No. 1, pp: 35-40.
7. Khobragade, N. W., Vaidya, N. V. and Lamba, N. K., (2014). Approximation algorithm for optimal solution to the linear programming problem. Int. J. Mathematics in Operational Research, Vol. 6, No. 2, pp: 139-154.
8. Media Omer and Nejmaddin Sulaiman, (2021). Solving cubic objective function programming problem by modification simplex method. Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 1-7. http://dx.doi.org/10.22075/ijnaa.2021.25547.3050.
9. Media A. Omer and Nejmaddin A. Sulaiman, (2022). New approach to solve cubic objective function programming problem. American Journal of Operations Research, 12, 83-93. https://doi.org/10.4236/ajor.2022.123005.
10. Jain, S., Mangal, A. and Shehawat, V. R. S., (2024). Modeling of cubic objective function programming problem via AHA simplex algorithm. Heritage Research Journal, Vol. 72, Issue 2, pp: 81-86.
11. Chouhan, A.S., Shekhar, G. and Mangal, A., (2024). KKL simplex algorithm for cubic objective function programming problem. Research paper presented in 6th International Conference on Emerging Trends of Sustainable Approaches in Science and Technology, February 24-25, 2024.